EPFL

Leçon 9.1
Oscillateur Généralisé Dissipatif

ME-332 – Mécanique Vibratoire

Prof. Guillermo Villanueva

École
polytechnique
fédérale
de Lausanne

Introduction

- Oscillateur généralisé dissipatif
- Condition de Caughey
- Solution en base modale
- Solution approximée pour systèmes *pas* Caughey

EPFL

Chapitre 12
Oscillateur Généralisé Dissipatif
Régime Libre

Oscillateur généralisé dissipatif et libre

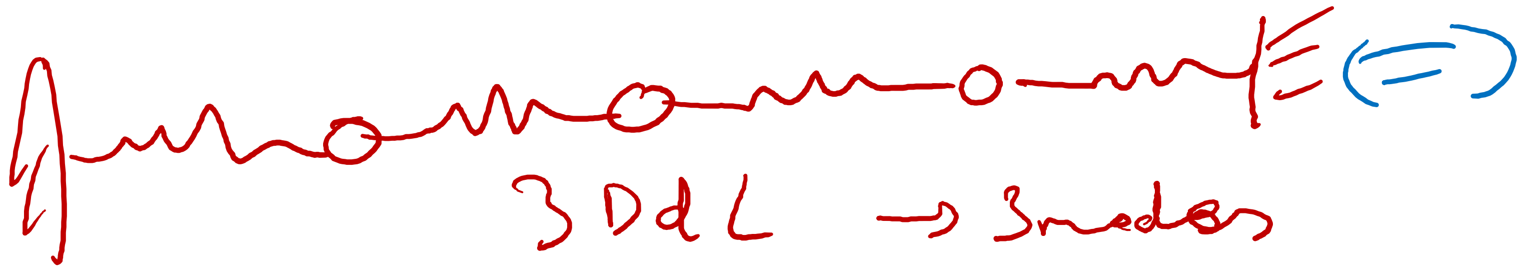
Equation différentielle de l'*oscillateur généralisé* à n degrés de liberté en régime libre dissipatif

$$[M]\ddot{\boldsymbol{x}} + [C]\dot{\boldsymbol{x}} + [K]\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \qquad (12.1)$$

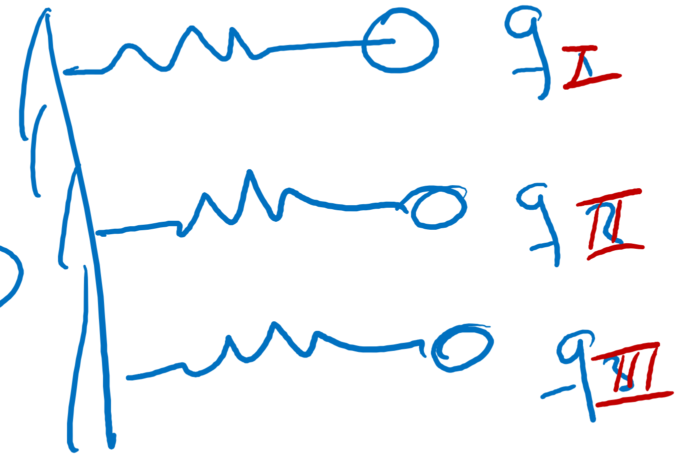
$\boldsymbol{x}$	vecteur des déplacements
$\dot{\boldsymbol{x}}$	vecteur des vitesses
$\ddot{\boldsymbol{x}}$	vecteur des accélérations
$[M]$	matrice des masses
$[C]$	matrice des pertes
$[K]$	matrice de rigidité

$[M]\ddot{x} + [K]\cdot x = 0$

$\hookrightarrow [A] = [M]^{-1}\cdot[K]$



3DdL → 3modes



Résolution du régime libre dissipatif par *changement de base*

$$\boldsymbol{x} = [B]\boldsymbol{q} \qquad (12.2)$$

Reformulation du régime libre dissipatif par le changement de base

$$[B]^T\left([M][B]\ddot{\boldsymbol{q}} + [C][B]\dot{\boldsymbol{q}} + [K][B]\boldsymbol{q}\right) = \boldsymbol{0} \qquad (12.3)$$

Prémultiplication de l'expression du régime libre par la matrice $[B]^T$

$$\underbrace{[B]^T[M][B]}_{=[M^\circ]}\ddot{\boldsymbol{q}} + [B]^T[C][B]\dot{\boldsymbol{q}} + \underbrace{[B]^T[K][B]}_{=[K^\circ]}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0} \qquad (12.4)$$

Oscillateur généralisé dissipatif et libre

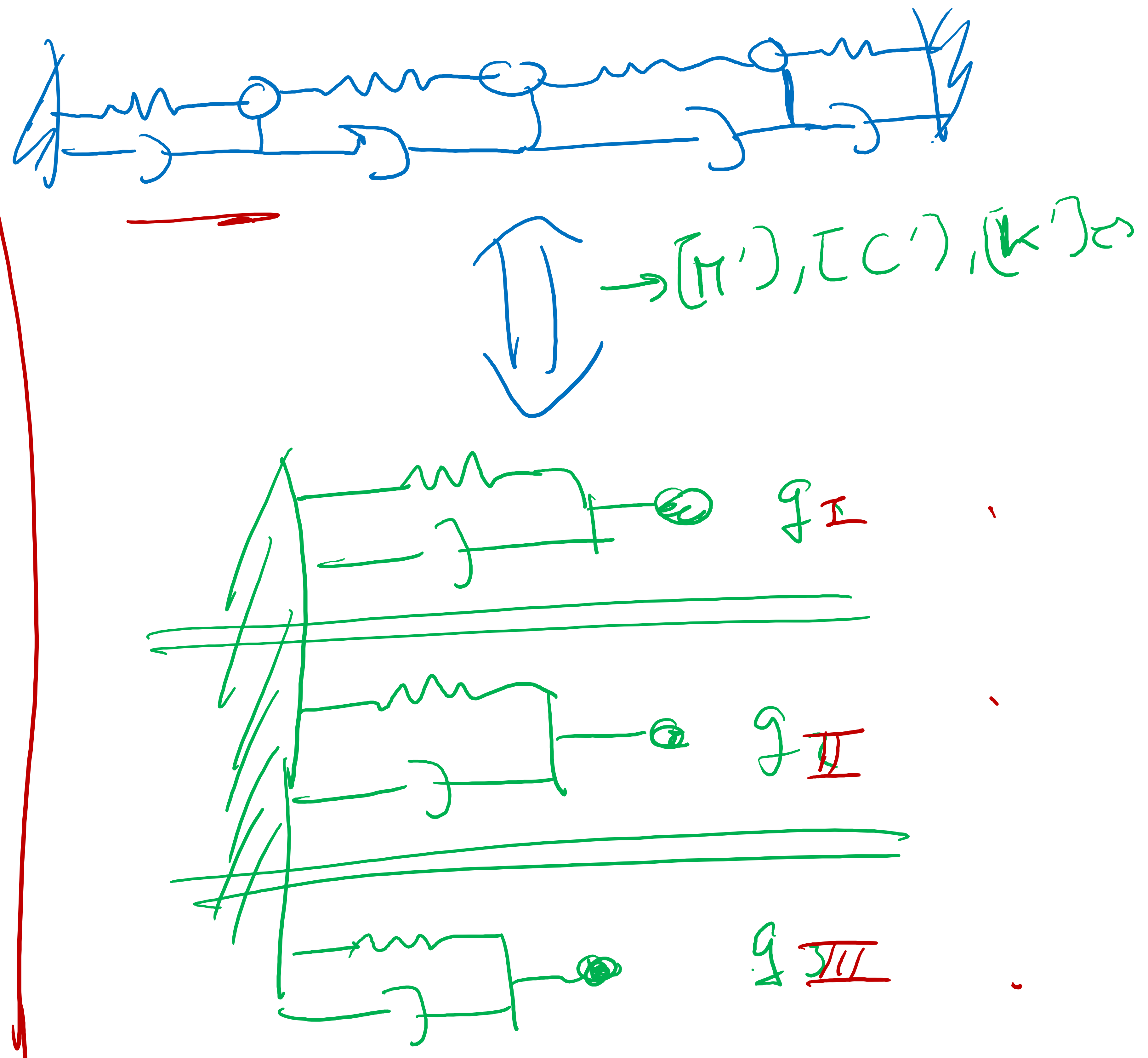
Prémultiplication de l'expression du régime libre par la matrice $[B]^T$

$$[B]^T[M][B]\ddot{\boldsymbol{q}} + [B]^T[C][B]\dot{\boldsymbol{q}} + [B]^T[K][B]\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0} \qquad (12.4)$$

Conditions pour un *découplage* des n équations du régime libre dissipatif

$$\begin{cases} \boxed{[M'] = [B]^T[M][B]} \\ [C'] = [B]^T[C][B] \\ \boxed{[K'] = [B]^T[K][B]} \end{cases} \qquad (12.5)$$

avec $[M']$, $[C']$ et $[K']$ diagonales



Mécanique Vibratoire - SGM Ba5 - G. Villanueva

Condition de Caughey

Condition nécessaire et suffisante d'existence d'une matrice $[B]$ diagonalisant simultanément $[M]$, $[C]$ et $[K]$ – *Condition de Caughey*

Si $[M']$, $[C']$ et $[K']$ diagonales

$\Rightarrow [M']^{-1}[C']$ et $[M']^{-1}[K']$ diagonales

$$\Rightarrow [M']^{-1}[C'][M']^{-1}[K'] = [M']^{-1}[K'][M']^{-1}[C'] \qquad (12.9)$$

$$\Rightarrow [B]^{-1}[M]^{-1}[C][M]^{-1}[K][B] = [B]^{-1}[M]^{-1}[K][M]^{-1}[C][B] \qquad (12.10)$$

$$\Rightarrow [C][M]^{-1}[K] = [K][M]^{-1}[C] \qquad (12.11)$$

Condition suffisante mais non nécessaire d'existence d'une matrice $[B]$ diagonalisant simultanément $[M]$, $[C]$ et $[K]$

$$[M]^{-1}[C] = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \left[[M]^{-1}[K]\right]^i \qquad (12.12)$$

Cas particulier de l'*amortissement ou frottement proportionnel*

$$[M]^{-1}[C] = \alpha_0 [I] + \alpha_1 [M]^{-1}[K]$$

$$[C] = \alpha_0 [M] + \alpha_1 [K] \qquad (12.13)$$

Systèmes satisfaisant Caughey

Conséquences d'un amortissement satisfaisant la condition de Caughey

- résolution du régime libre dissipatif selon la démarche modale des systèmes conservatifs
- matrice de changement de base $[B]$ identique à la matrice modale du système conservatif associé
- présence de n modes vibratoires amortis *réels*, qualifiés de classiques

Equation différentielle du *régime libre* pour un amortissement satisfaisant la condition de Caughey

$$\boxed{[M^o]\ddot{q} + [C^o]\dot{q} + [K^o]q = 0} \qquad (12.14)$$

avec

$$\begin{cases} [M^o] = [B]^T[M][B] \\ [C^o] = [B]^T[C][B] \\ [K^o] = [B]^T[K][B] \end{cases} \qquad (12.15)$$

$[M^o]$, $[C^o]$ et $[K^o]$ diagonales

Solution en Base Modale

$\ddot{q}_I + \frac{c_I^o}{m_I^o} \dot{q}_I + \frac{h_{oI}}{m_I^o} \cdot q_I = 0$

$\vdots$

Formulation canonique du *régime libre* (prémultiplication par la matrice $[M^o]^{-1}$)

$$\boxed{\ddot{\boldsymbol{q}} + [M^o]^{-1}[C^o]\dot{\boldsymbol{q}} + [M^o]^{-1}[K^o]\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}}$$

$$\ddot{\boldsymbol{q}} + [2\Lambda]\dot{\boldsymbol{q}} + [\Omega_0^2]\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$$

avec

$$\begin{aligned} [2\Lambda] &= [M^o]^{-1}[C^o] \\ &= [B]^{-1}[M]^{-1}[C][B] \\ [\Omega_0^2] &= [\Delta] = [M^o]^{-1}[K^o] \\ &= [B]^{-1}[M]^{-1}[K][B] \end{aligned} \qquad (12.18)$$

Découplage du système différentiel en n équations indépendantes (n oscillateurs élémentaires linéaires dissipatifs)

$$\boxed{\ddot{q}_p + 2\lambda_p \dot{q}_p + \omega_{0p}^2 q_p = 0} \qquad (12.19)$$

avec

$$\boxed{2\lambda_p = \frac{c_p^o}{m_p^o}} \qquad \boxed{\omega_{0p}^2 = \delta_p = \frac{k_p^o}{m_p^o}} \qquad (12.17)$$

Solution en Base Modale

Intégration des n équations découplées

$$q_p = Q_p \, e^{-\lambda_p t} \cos\left(\omega_p t - \varphi_p\right) \qquad (p = 1, 2, \ldots, n) \qquad (12.21)$$

← sous-amorti

Définition de la *pulsation propre* ω_p de rang p du système *amorti*

$$\omega_p = \sqrt{\omega_{0p}^2 - \lambda_p^2} = \omega_{0p}\sqrt{1 - \eta_p^2} \qquad (12.22)$$

Définition des grandeurs caractéristiques par analogie avec l'oscillateur élémentaire

λ_p coefficient d'amortissement *modal*

$\eta_p = \dfrac{\lambda_p}{\omega_{0p}}$ amortissement relatif *modal* ou facteur d'amortissement *modal*

Retour des corrdonnées normales aux *coordonnées spatiales*

$$\boldsymbol{x} = [B]\boldsymbol{q}$$

$$= \sum_p^n \boldsymbol{B}_p \, Q_p \, e^{-\lambda_p t} \cos\left(\omega_p t - \varphi_p\right) \qquad (12.23)$$

$$= \sum_p^n \boldsymbol{\beta}_p \, X_p \, e^{-\lambda_p t} \cos\left(\omega_p t - \varphi_p\right) \qquad (12.24)$$

mode propre de rang p

Solution en Base Modale

$\vec{\beta}_r \times \vec{\beta}_s$

↳ orthogonaux seulement si [M] ou [K] sont scalaires.

Conditions d'un *lâcher initial*

$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{X}_0 = \sum_p^n \boldsymbol{\beta}_p \, X_p \cos \varphi_p \quad (12.25\text{-}27)$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(0) = \boldsymbol{V}_0 = \sum_p^n \boldsymbol{\beta}_p \, X_p \, (\omega_p \sin \varphi_p - \lambda_p \cos \varphi_p) \quad (12.26\text{-}28)$$

Prémultiplication des conditions initiales par le produit $\boldsymbol{\beta}_r^T [M]$

$$\boldsymbol{\beta}_r^T [M] \boldsymbol{X}_0 = \sum_p^n \boldsymbol{\beta}_r^T [M] \boldsymbol{\beta}_p \, X_p \cos \varphi_p$$

$$\boldsymbol{\beta}_r^T [M] \boldsymbol{V}_0 = \sum_p^n \boldsymbol{\beta}_r^T [M] \boldsymbol{\beta}_p \, X_p \, (\omega_p \sin \varphi_p - \lambda_p \cos \varphi_p)$$

Solution en Base Modale

Extraction de l'*amplitude de référence* et de la *phase* du mode de rang r

$$X_r \cos\varphi_r = \frac{1}{m_r^o} \boldsymbol{\beta}_r^T [M] \boldsymbol{X}_0 \quad (12.29)$$

$$X_r \sin\varphi_r = \frac{1}{m_r^o\, \omega_r} \boldsymbol{\beta}_r^T [M](\boldsymbol{V}_0 + \lambda_r \boldsymbol{X}_0) \quad (12.30)$$

Réponse du système aux conditions initiales

$$\vec{x}(t) = \sum_{p=1}^{n} \vec{\beta_p} X_p e^{-\lambda_p t} \cos(\omega_p t - \varphi_p) = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{m_p^0} \vec{\beta_p} e^{-\lambda_p t} \left(\vec{\beta_p^T}[M]\vec{X_0} \cos(\omega_p t) + \frac{1}{\omega_p} \vec{\beta_p^T}[M](\vec{V_0} + \lambda_p \vec{X_0}) \sin(\omega_p t) \right)$$

Systèmes Caughey

Commentaires sur les systèmes à amortissement classique

- les vecteurs modaux (vecteurs propres de la matrice $[B]$) sont identiques à ceux du système conservatif associé, dont ils possèdent les propriétés d'orthogonalité;
- les solutions du système dissipatif ont, à l'amortissement près, la même structure que celles du système conservatif
- l'amortissement relatif est différent pour chaque mode propre.

Approximation pour systèmes PAS CAUGHEY

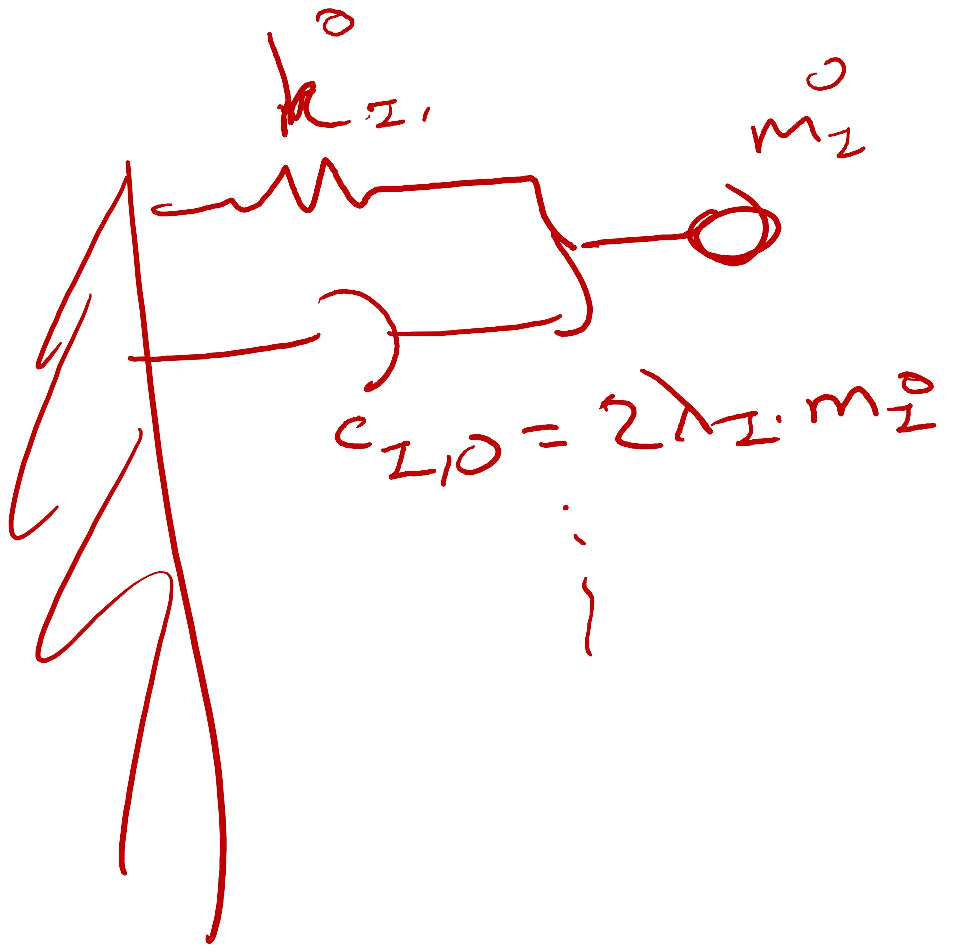
Systèmes non-satisfaisant Caughey

Recherche d'une solution approchée

On calcule les modes propres et les valeurs propres pour le cas conservatif.

$\vec{\beta_p}$

Alors on utilise un concept similaire au quotient de Rayleigh mais avec l'amortissement:



$$R_\lambda(\vec{u}) = \frac{1}{2}\frac{\vec{u}^T[C]\vec{u}}{\vec{u}^T[M]\vec{u}}$$

$$\lambda_p = R_\lambda(\overrightarrow{\beta_p}) = \frac{1}{2}\frac{\overrightarrow{\beta_p}^T[C]\overrightarrow{\beta_p}}{\overrightarrow{\beta_p}^T[M]\overrightarrow{\beta_p}} = \lambda_p$$